

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Σεπτέμβριος 2018

ΠΡΟΣΟΧΗ: Η διάρκεια των εξετάσεων είναι τρεις ώρες. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα (2 μονάδες το καθένα). Καλή Επιτυχία.

Θέμα 1 : α) Αν $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνια μεταξύ των με $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|z\|_2$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $x + z$, $x - y - z$ και $x + 2y - z$ είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Αν $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ είναι συμμετρικός πίνακας και $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$ οποιοσδήποτε πίνακας, να αποδείξετε ότι ο πίνακας $QA + AQ^T$ είναι συμμετρικός.

Θέμα 2 : Δίνεται ένα γραμμικό σύστημα $Ax = b$ με $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση και να συγκριθούν μεταξύ των

- η μέθοδος Jacobi,
- η βέλτιστη μέθοδος παρεκβολής (extrapolated) της Jacobi και
- η βέλτιστη SOR μέθοδος.

Θέμα 3 : α) Να αποδείξετε ότι τα δυο διαδοχικά διανύσματα υπόλοιπο $r^{(k-1)}$ και $r^{(k)}$ της μεθόδου απότομης καθόδου, είναι ορθογώνια μεταξύ των.
β) Δίνεται το γραμμικό σύστημα $Ax = b$, όπου

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Αφού αποδειχτεί ότι ο A είναι θετικά ορισμένος, να λυθεί το σύστημα με τη μέθοδο συζυγών κλίσεων με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = 0$. (Να διατηρήσετε κλάσματα κατά τους υπολογισμούς.)

Θέμα 4 : Να λυθεί το γραμμικό πρόβλημα ελαχίστων τετραγώνων $\min_x \|b - Ax\|_2$, με

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

και $b = (2 \ 4 \ 1 \ -3)^T$, με την QR ανάλυση χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Gram-Schmidt ορθογωνιοποίησης. Στη συνέχεια, να βρεθεί η τιμή $\min_x \|b - Ax\|_2$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με ριζικά και κλάσματα στους υπολογισμούς.)

Θέμα 5 : Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 16 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

- Να γίνει η παραγοντοποίηση Cholesky του πίνακα A και να βρεθεί ο αντίστροφός του χρησιμοποιώντας την παραγοντοποίηση Cholesky.
- Να γίνουν δυο επαναλήψεις για την προσέγγιση της μεγαλύτερης απόλυτα ιδιοτιμής και του αντίστοιχου ιδιοδιανύσματος χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δυνάμεων με τον αλγόριθμο της $\|\cdot\|_\infty$ και με αρχικό διάνυσμα $x^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T$. (Να γίνουν ακριβείς πράξεις με κλάσματα στους υπολογισμούς.)